非線型Klein-Gordon方程式の大域解の存在に対する一注意(函数解析を用いた偏微分方程式の研究)

片山, 聡一郎

数理解析研究所講究録
969巻 1996年 168-177

非線型 Klein-Gordon 方程式の大域解の存在に対する一注意

京大・数理工* 片山聡一郎 (Soichiro Katayama)

§1. 序

非線型 Klein-Gordon 方程式の初期値問題に対する研究は数多く成されているが, ここでは簡単のため半線形の場合に考察を制限して, 次の初期値問題を考える:

$$(1.1)_\varepsilon \begin{cases} \Big(\Box+1\Big)u(t,x)=F\Big(u(t,x),Du(t,x)\Big), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^n, \\ u(0,x)=\varepsilon f(x),\ u_t(0,x)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}^n. \end{cases}$$

ここに, $\Box=\partial_t^2-\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2$, $Du=\Big(\partial_t u,\partial_{x_1}u,\cdots,\partial_{x_n}u\Big)$, また $F=F(u,q)$ は $(u,q)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n+1}$ の滑らかな関数で, $(u,q)=0$ の近傍で

$$F(u,q)=O\Big(|u|^\lambda+|q|^\lambda\Big)$$

を満足するものとする ($\lambda=2,3,\cdots$). $\varepsilon(>0)$ は小さなパラメーター, また簡単のため $f,g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ とする.

$n\geq 2$, $\lambda\geq 2$ の場合には, 任意の f, $g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し, ある $\varepsilon_0(>0)$ が存在し, $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ ならば $(1.1)_\varepsilon$ の一意な C^∞解が (時間) 大域

*現在の所属: 和歌山大・教育

的に存在することが知られている (Klainerman - Ponce [11], Shatah [15] ($n \geq 5$), Klainerman [9], Shatah [16] ($n = 3, 4$), Simon - Taflin [17], Ozawa - Tsutaya - Tsutsumi [14] ($n = 2$); $n = 2$ の特別な場合については Georgiev - Popivanov [3], Kosecki [12] も参照のこと). (時間) 局所解の存在は良く知られているから, 大域解の存在を示す為には, ある種のアプリオリ評価を得ることが重要になる. 以下で, もう少し詳しく手法について説明したい. [11], [15] では, 古典的に知られた線型 Klein-Gordon 方程式の解の時間に関する減衰評価とエネルギー評価とを補間することによりアプリオリ評価を得ている. 補間を行うのは, 古典的減衰評価には右辺 (この場合, 非線形項 F) の L^1-ノルムが表れるため, 特に $\lambda = 2$ とすると解の減衰をそのままでは有効に利用することが出来ないからである. この手法では, $n = 2, 3, 4$ の場合には期待できる解の減衰が不十分なため大域解の存在を示すことが出来ない. $n = 3, 4$ の場合, [9] では, まず $\Box + 1$ と可換になるいくつかの微分作用素を導入し, それらを用いた新しい減衰評価を示している (この評価は後に Hörmander [4], Georgiev [2] により一般の次元に拡張されている). この評価とエネルギー不等式を組み合わせることによりアプリオリ評価が得られる. 類似の手法は最初, 非線形波動方程式の研究に有効に用いられた (Klainerman [8] 参照). 以下, ここではこの手法を invariant norm の方法と呼ぶことにする. 他方, [16] では, 未知関数を変換し, 減衰評価を 3 次のオーダーの非線形項をもつ Klein-Gordon 方程式の解の評価に帰着させ, 後は [11], [15] の手法を援用することによりアプリオリ評価を得ている. これは normal form の方法と呼ばれる.

$n = 2, \lambda = 2$ の場合には解の期待できる減衰が小さいため, invariant norm の方法, normal form の方法ともにそれだけを適用しても不十分

なアプリオリ評価しか得ることが出来ない. [14] では, [16] と同様に normal form の手法で変換は行うが, その後, [11], [15] の手法を援用する代わりに invariant norm の方法に訴えることにより困難を解決している. この際には, 変換と invariant norm の方法で現れる微分作用素との交換子の評価が重要になる.

以上で見たように, $n \geq 2$ の場合には, 今考えている枠組みの中では最も一般的な非線形項に対して, 小さな初期条件を持つ場合の大域解の存在の問題は解決されていると言える. さて, 次に $n = 1$ の場合について論じたい. この時, 記述の簡便化のために $(1.1)_\varepsilon$ を

$$(1.2)_\varepsilon \begin{cases} \left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + 1\right)u = F(u, u_t, u_x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R} \\ u(0,x) = \varepsilon f(x),\ u_t(0,x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

と書くことにする. 以前と同様に $(u, q_1, q_2) = 0$ の近傍で $F(u, q_1, q_2) = O\left(|u|^\lambda + |q_1|^\lambda + |q_2|^\lambda\right)$ とする. [11], [15] によれば, $\lambda \geq 4$ ならば, 十分小さな ε に対し $(1.2)_\varepsilon$ の C^∞解が時間大域的に存在することがわかる. 実は, このことは $\lambda = 2, 3$ の場合には一般には期待できない. 例えば,

$$F = u_t^2 u_x + c_1 u^3 + c_2 u^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

とすると $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) g(x) dx > 0$ ならば ε をどんなに小さくしても C^∞ 解は大域的に存在しないことが示されている (Yordanov [19] 参照のこと). このことから, 何らかの制限を F の 3 次の項に課さなければ大域解の存在は保証されないことがわかる. Yagi ([18]) は半線形の場合に, Moriyama ([13]) は準線形の場合に, [16] と類似の変換を用いることにより高次の非線形項のみを持つ方程式に帰着させ, アプリオリ評価を得た. ただし, 2 次の項を消す場合とは異なり, 3 次の項を消す場合には形式的に求めた変換が意味を持つとは限らない. 従って, 扱える非線形項はそれから形式的に求められた変換が意味を持つものだけ

に限られることになる. 実際には, 多項式で表現される変換で打ち消せるものだけになる. 具体的には彼らの手法で扱えるのは半線形の場合に限定すると

$$F = c\Big(-u^2 + 3u_t^2 - 3u_x^2\Big), \quad c \in \mathbf{R}$$

の形のものに限られる.

本研究の目的は, 上で触れた多項式による変換と invariant norm の方法を組み合わせることにより, より広いクラスの非線形項を扱うことである. 全体としては, Kosecki [12] の手法に従うことになる.

定理 1.1. 初期値問題 $(1.2)_\varepsilon$ において, F が次のように表されると仮定する:

$$F = c_1\Big(-u^2+3u_t^2-3u_x^2\Big)+\Big(c_2u_t+c_3u_x\Big)\Big(-3u^2+u_t^2-u_x^2\Big)+H(u,u_t,u_x),$$

ただし c_1, c_2, $c_3 \in \mathbf{R}$, また $(u,q_1,q_2)=0$ の近傍で

$$H(u,q_1,q_2) = O\Big(|u|^4+|q_1|^4+|q_2|^4\Big)$$

である. このとき任意の f, $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対し, ある正数 ε が存在して, 任意の $\varepsilon \le \varepsilon_0$ に対し, $(1.2)_\varepsilon$ の大域解 $u \in C^\infty\Big([0,\infty)\times\mathbf{R}\Big)$ が存在する.

註. (i) 上の定理で得られた解 u に対し $(\Box+1)w=0$ を満たす w が存在して,

$$\Big\|(u-w)(t,\cdot)\Big\|_{H^1} + \Big\|(u_t-w_t)(t,\cdot)\Big\|_{L^2} \to 0, \ (t\to\infty)$$

となることも示せる. また, 半線形という制限をはずした場合にも, 上の定理と同様の結果が成り立つような非線形項のクラスが得られてい

る．詳細については [7] を参照されたい．

(ii) Yordanov [19] の方法を用いれば

$$F = u_t^2 + bu^2 u_x + cu_x^3$$

を考えたとき $b \geq 0, c \geq 0$ ならば, $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)g(x)dx > 0$ のとき, どんなに ε を小さくしても大域解を持たないことが示せる．他方, 上の定理によれば $b = -3$, $c = -1$ ならば, 小さい初期条件に対しては常に大域解を持つことになる．これは興味深い結果に思われる．

§2. 証明の概略

まず $Z_1 = x\partial_t + t\partial_x$, $Z_2 = \partial_t$, $Z_3 = \partial_x$ と定義する．$[\Box + 1, Z_k] = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ となる．multi-index $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ を用いて $Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} Z_2^{\alpha_2} Z_3^{\alpha_3}$ と書くことにする．また,

$$|w(t,x)|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \Big|(Z^\alpha w)(t,x)\Big|, \tag{2.1}$$

$$\|w(t,x)\|_{k,p} = \Big\| |w(t,\cdot)|_k \Big\|_{L^p(\mathbf{R})}, \quad 1 \leq p \leq \infty \tag{2.2}$$

と定義する．

さて, u を $(1.2)_\varepsilon$ の $0 \leq t < T$ における解とする．このとき $0 \leq t < T$ に対して

$$\begin{aligned} e_\varepsilon(t) &= \sup_{x \in \mathbf{R}} (1 + t + |x|)^{1/2} |u(t,x)|_{k+1} \\ &\quad + (1+t)^{-\mu} \Big\{ \|u(t,\cdot)\|_{2k,2} + \|Du(t,\cdot)\|_{2k,2} \Big\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

と定義する．ただし $Du = (u_t, u_x)$, k は $k \geq 5$ となる適当な整数, μ は $0 < \mu < 1/2$ となる適当な定数である．また,

$$E_\varepsilon(t) = \sup_{0 \leq s < t} e_\varepsilon(s), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.4}$$

とする．以下では，例えば $E_\varepsilon(T) \le 1$ と仮定する．目的は，(T 及び十分小さい ε とは独立な) 正定数 C が存在して

$$E_\varepsilon(T) \le C\Big(\varepsilon + E_\varepsilon(T)^3\Big) \tag{2.5}$$

となることを示すことである．もし (2.5) の成立を示せれば，十分小さい ε に対して $E_\varepsilon(t)$ は解が存在する限り有界に留まることが示せる．このアプリオリ評価と局所解の存在定理を組み合わせれば，大域解の存在，すなわち我々の求める定理を得ることが出来る．

(2.5) の証明は次の手順による．以下では，k には依存するが，T 及び十分小さい ε とは独立な定数は全て，C_k と書くことにする．まず，線形 Klein-Gordon 方程式に対するエネルギー不等式より

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_{2k,2} &+ \|Du(t,\cdot)\|_{2k,2} \\ &\le C_k\left(\varepsilon + \int_0^t \|F(u,u_t,u_x)(\tau,\cdot)\|_{2k,2}d\tau\right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る．F が原点の近傍で 3 次のオーダーであることに注意すると

$$\begin{aligned}\|F(u,u_t,u_x)(\tau,\cdot)\|_{2k,2} &\le C_k\|u(\tau,\cdot)\|_{k+1,\infty}^2 \\ &\qquad \times\Big(\|u(\tau,\cdot)\|_{2k,2} + \|Du(\tau,\cdot)\|_{2k,2}\Big) \\ &\le C_k(1+\tau)^{\mu-1}E_\varepsilon(T)^3,\ 0 \le \tau < T\end{aligned}$$

を得るから，(2.6) より

$$(1+t)^{-\mu}\Big\{\|u(t,\cdot)\|_{2k,2} + \|Du(t,\cdot)\|_{2k,2}\Big\} \le C_k\Big(\varepsilon + E_\varepsilon(T)^3\Big) \tag{2.7}$$

となる．次に L^∞-ノルムの評価を行いたい．このために，

$$v = u - \Big(c_1u^3 + c_2u^2u_t + c_3u^2u_x\Big)/2$$

と定義する．単純計算により，$(\Box + 1)v = I_1 + I_2$ となる．ここに

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad I_1 &= -2c_2u\Big(u_tu_{tt}-u_xu_{tx}+uu_t\Big)\\
&\quad -2c_3u\Big(u_tu_{tx}-u_xu_{xx}+uu_x\Big),\\
(2.9)\qquad I_2 &= H(u,u_t,u_x)-\frac{3}{2}c_1u^2F-c_2\left(uu_tF+\frac{1}{2}u^2F_t\right)\\
&\quad -c_3\left(uu_xF+\frac{1}{2}u^2F_x\right)
\end{aligned}
$$

である．I_2 は $(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx})$ の 4 次のオーダーの式になることに注意すると，

$$
(2.10)\quad |I_2(t,x)|_k \le C_k|u(t,x)|^3_{[k/2]+2}\Big(|u(t,x)|_k+|Du(t,x)|_{k+1}\Big)
$$

を得る．I_1 は 3 次の項だから，この部分の処理が重要になる．$(\Box+1)u=F$を用いると，

$$
(2.11)\qquad u_tu_{tt}-u_xu_{tx}+uu_t = u_tu_{xx}-u_xu_{tx}+u_tF
$$

を得る．$Q(U,V)\equiv U_tV_x-U_xV_t$ とおくと (2.11) の右辺は $Q(u,u_x)+u_tF$ と表される．同様に

$$
(2.12)\qquad u_tu_{xx}-u_xu_{xx}+uu_x = Q(u,u_t)+u_xF
$$

と書ける．Z_1 を用いると

$$
(2.13)\quad Q(U,V)=\Big(U_t(Z_1V)-(Z_1U)V_t\Big)/t,\ (\text{ただし } t\neq 0)
$$

もしくは

$$
(2.14)\quad Q(U,V)=\Big((Z_1U)V_x-U_x(Z_1V)\Big)/x,\ (\text{ただし } x\neq 0)
$$

と書き直すことが出来る．また

$$
Z^\alpha Q(U,V)=\sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}C^\alpha_{\beta,\gamma}Q(Z^\beta U,Z^\gamma V)
$$

が成立する ($C^{\alpha}_{\beta,\gamma}$ は定数). これらを用いると, u_tF, u_xF は 4 次のオーダーであることに注意して

$$(2.15)\quad \begin{aligned} &|I_1(t,x)|_k \\ &\le C_k\Big\{(1+t+|x|)^{-1}|u(t,x)|^2_{[k/2]+2}+|u(t,x)|^3_{[k/2]+2}\Big\} \\ &\quad\times\Big(|u(t,x)|_{k+1}+|Du(t,x)|_{k+1}\Big)\end{aligned}$$

を得る ([9], [1]; [5], [6] も参照のこと). さて, [4], [2] の線形 Klein-Gordon 方程式の解の L^∞ 評価を適用すると,

$$(2.16)\quad \begin{aligned} &(1+t+|x|)^{1/2}|v(t,x)|_{k+1} \\ &\le C_k\left(\varepsilon+\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{\tau\in[0,t]\cap\Omega_j}\Big\|(1+\tau+|\cdot|)|(I_1+I_2)(\tau,\cdot)|_{k+4}\Big\|_{L^2}\right)\end{aligned}$$

を得る. ここに$\Omega_0=[0,2]$, $\Omega_j=[2^{j-1},2^{j+1}]$ $(j\ge 1)$ である. $k\ge 5$ に対しては, $[(k+4)/2]+2\le k+1$, $k+4\le 2k$ であることに注意すると, (2.10), (2.15) から

$$\Big\|(1+\tau+|\cdot|)|(I_1+I_2)(\tau,\cdot)|_{k+4}\Big\|_{L^2}\le C_k(1+\tau)^{-1/2}E_\varepsilon(T)^3,\ 0\le\tau<T$$

という評価を得る. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{\tau\in[0,t]\cap\Omega_j}(1+\tau)^{-1/2}<+\infty$ だから, 結局,

$$(2.17)\qquad (1+t+|x|)^{1/2}|v(t,x)|_{k+1}\le C_k\Big(\varepsilon+E_\varepsilon(T)^3\Big)$$

が成立する. さて, v の定義より

$$|u(t,x)|_{k+1}\le|v(t,x)|_{k+1}+|u(t,x)|^2_{[k/2]+1}\Big(|u(t,x)|_{k+1}+|Du(t,x)|_{k+1}\Big)$$

を得るが, Sobolev の埋め込みから

$$|u(t,x)|_{k+1}+|Du(t,x)|_{k+1}\le C_k\|u(t,\cdot)\|_{k+2,2}+\|Du(t,\cdot)\|_{k+2,2}$$

であるから, $k \geq 5$ に注意すると

$$(1+t+|x|)^{1/2}|u(t,x)|_{k+1} \leq (1+t+|x|)^{1/2}|v(t,x)|_{k+1}+C_k(1+t)^{\mu-1}E_\varepsilon^3(T)$$

が $0 \leq t < T$ で成立する. $\mu < 1/2$ だから結局, (2.17) より

$$(1+t+|x|)^{1/2}|u(t,x)|_{k+1} \leq C_k\Big(\varepsilon + E_\varepsilon^3(T)\Big) \tag{2.18}$$

を得る. (2.7) と (2.18) から (2.5) が直ちに得られる.

参考文献

[1] Georgiev, V., Global solution of the system of wave and Klein-Gordon equations, *Math Z.*, **203** (1990), 683 - 698.

[2] Georgiev, V., Decay estimates for the Klein-Gordon equation, *Commun. in Partial Differential Equations*, **17** (1992), 1111 - 1139.

[3] Georgiev, V., and Popivanov, P., Global solution to the two dimensional Klein-Gordon equation, *Commun. in Partial Differential Equations*, **16** (1991), 941 - 995.

[4] Hörmander, L., Remarks on the Klein-Gordon equation, *Journées "Equations aux dérivées partielles"*, Saint - Jean - Monts 1987, Conférence no. 1, Soc. Math. France, 1987.

[5] Katayama, S., Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **29** (1993), 1021 - 1041.

[6] Katayama, S., Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **31** (1995), 645 - 665.

[7] Katayama, S., A note on global existence of solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, *preprint*.

[8] Klainerman, S., Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **38** (1985), 321 - 332.

[9] Klainerman, S., Global Existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations with small data in four space – time dimensions *Comm. Pure Appl. Math.*, **38** (1985), 631 -641.

[10] Klainerman, S., The null condition and global existence to nonlinear wave equations, *Lectures in Applied Math.*, **23** (1986), 293 – 326.

[11] Klainerman, S. and Ponce, G., Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36** (1983), 133 – 141.

[12] Kosecki, R., The unit condition and global existence for a class of nonlinear Klein-Gordon equations, *J. Differential Equations*, **100** (1992), 257 – 268.

[13] Moriyama, K., Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, *preprint.*

[14] Ozawa, T., Tsutaya, K., and Tsutsumi, Y., Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions, *preprint.*

[15] Shatah, J., Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations, *J. Differential Equations*, **46** (1982), 409 – 425.

[16] Shatah, J., Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **38** (1985), 685 – 696.

[17] Simon, J. C. H., and Taflin, E., The Cauchy problem for non-linear Klein-Gordon equations, *Commun. Math. Phys.*, **152** (1993), 433 – 478.

[18] Yagi, K., Normal forms and nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension, Master thesis, Waseda University, March (1994).

[19] Yordanov, B., Blow-up for the one dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity, *preprint.*